PODSTAWY METOD NUMERYCZNYCH

(wykład + ćwiczenia laboratoryjne)

Prof. dr hab. Krzysztof Dems

Treści programowe:

- Podstawy obliczeń numerycznych, obliczenia dokładne i zaokrąglenia, rodzaje błędów.
- Algebra macierzy: tworzenie macierzy, podstawowe operacje na macierzach.
- Metody rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych.
- Metody rozwiązywania nieliniowego równania z jedną niewiadomą oraz układów równań nieliniowych.
- Wielomiany jednej i więcej zmiennych.
- Interpolacja i aproksymacja funkcji jednej zmiennej.
- Różniczkowanie numeryczne.
- Całkowanie numeryczne.

ŹRÓDŁA BŁĘDÓW PRZY ROZWIĄZYWANIU PROBLEMU:

Powstają w dwóch obszarach:

1. Przy matematycznym formułowaniu zadania.

2. Podczas wykonywania obliczeń:
    - błędy grube lub pomyłki;
    - błąd metody lub obcięcia;
    - błąd zaokrąglenia.

Błędy grube $\Leftarrow$ stosowanie komputerów w obliczeniach zmniejszyło prawdopodobieństwo ich występowania.

Błąd metody lub obcięcia $\Leftarrow$ rozwiązywanie problemu w postaci przybliżonej, mogącej się różnić od postaci pierwotnej.

Błąd zaokrąglenia $\Leftarrow$ nieskończone rozwinięcia dziesiętne (lub dwójkowe w komputerze) trzeba zaokrąglać.

DEFINICJE BŁĘDÓW:

Pojęcie pierwotne $\Rightarrow$ **wartość dokładna (WD)**

1) **Wartość przybliżona (WP) :**

wart. dokładna = wart. przybliżona + błąd bezwzględny

WD = **WP** + **BB**

2) **Błąd względny (BW):** $BW = \dfrac{BB}{WD}$

Prosty przykład:

WD = $\dfrac{1}{3}$; przybliżenie dziesiętne: WP = 0.333

$$BB = WD - WP = \frac{1}{3} - 0.333 = \frac{1}{3}\cdot 10^{-3}$$

$$BW = \frac{BB}{WD} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 10^{-3}}{\frac{1}{3}} = 10^{-3}$$

RERGUŁA ZAOKRĄGLEŃ:

Liczba x jest poprawnie zaokrąglona na *d*-tej pozycji do liczby $x^{(d)}$ jeżeli błąd zaokrąglenia ε jest taki, że

$$\boxed{|\varepsilon| = \left|x - x^{(d)}\right| \le \frac{1}{2} \cdot 10^d}$$

Jeżeli $|\varepsilon| = \frac{1}{2} \cdot 10^d$ $\Rightarrow$ można wybrać zaokrąglenie "*w dół*" lub "*w górę*".

Przykład:

niech WD $x = 6.74399666......$

wtedy: WP $x^{(-3)} = 6.744$

$x^{(-7)} = 6.7439967$

oraz niech WD $x = 0.27755000.....$

wtedy WP :

$x^{(-4)} = 0.2775$

lub

$x^{(-4)} = 0.2776$

KOLEJNOŚĆ OBLICZEŃ A BŁĄD:

Kolejność wykonywania działań i zaokrągleń ma wpływ na błąd **wyniku** obliczeń.

Przykład:

- **obliczenia dokładne** (bez błędu zaokrągleń):
  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

bez względu na wartości a i b.

- **obliczenia przybliżone** (z błędem zaokrągleń) :

wynik działań $a^2 - b^2$ może być różny od wyniku działań $(a+b)(a-b)$ szczególnie, jeżeli a i b są dużymi liczbami mało różniącymi się od siebie.

BŁĄD WARTOŚCI FUNKCJI:

Funkcja wielu zmiennych: $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \Leftarrow$ WD

WD x_i ; WP $y_i = x_i - \varepsilon_i$; $\varepsilon_i \Leftarrow$ BB zmiennej x_i.

WP funkcji $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

BB funkcji = $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) - f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$

BB funkcji =

$$= f(y_1+\varepsilon_1, y_2+\varepsilon_2, \ldots\ldots, y_n+\varepsilon_n) - f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) =$$

$$= \left[f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i\, \varepsilon_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_j} + \ldots\ldots \right] - f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$$

$$\text{BB funkcji} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i\, \varepsilon_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} + \ldots\ldots$$

Ostatecznie: $$\text{BB funkcji} \approx \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

TEORIA STATYSTYCZNA BŁĘDU ZAOKRĄGLENIA:

Rozkład sumy n wzajemnie niezależnych błędów, przy $n \to \infty$, dąży do rozkładu normalnego.

Przy obliczeniach, w których występuje n działań:

max. błąd bezwzględny $(BB)_{max}$ jest proporcjonalny do n;

błąd prawdopodobny BP jest proporcjonalny do $\sqrt{n}$.

ALBEBRA MACIERZY

Określenie macierzy:

Uporządkowany zbiór m x n liczb rozmieszczonych w postaci prostokątnej tabeli o m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} (i=1,2,...,m ; j=1,2,....,n) - elementy macierzy

$$\mathbf{A} = [\, a_{ij}]$$

Jest to macierz typu m x n

inaczej dim $\mathbf{A} = m \times n$

- $m = n$ → macierz kwadratowa
- $m \neq n$ → macierz prostokątna
- $m = 1, n > 1$ → macierz (lub wektor) wierszowy
- $m > 1, n = 1$ → macierz (lub wektor) kolumnowy

Ważne macierze:

- macierz przekątniowa (lub diagonalna)

macierz kwadratowa n x *n o własności:* $a_{ii} \neq 0$, $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & .\,. & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & .\,. & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & .\,. & 0 \\ : & : & : & & : \\ 0 & 0 & 0 & .\,. & a_n \end{bmatrix}$$

- macierz jednostkowa **I**

jeżeli $a_i = 1$ dla $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .\,. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .\,. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .\,. & 0 \\ : & : & : & & : \\ 0 & 0 & 0 & .\,. & 1 \end{bmatrix}$$

symbol Kroneckera $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ 1 & \text{dla} \quad i = j \end{cases} \Rightarrow \mathbf{I} = [\delta_{ij}]$

- macierz zerowa **0**

  jeżeli wszystkie elementy macierzy $a_{ij} = 0$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ : & : & : & & : \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 \end{bmatrix}$$

- macierz symetryczna

  macierz kwadratowa o własności: $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 6 & -2 & 7 \\ 8 & 4 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- macierz asymetryczna

  macierz kwadratowa o własności: $a_{ij} = -a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 & -2 \\ -3 & 0 & 9 & 4 & -1 \\ -5 & -9 & 0 & -2 & 7 \\ -8 & -4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Podstawowe działania na macierzach:

1. Równość macierzy:

$$\dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{B}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}}$$

2. Dodawanie dwóch macierzy:

$$\dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{B} = \dim \mathbf{C}$$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Własności dodawania macierzowego:

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
3) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

3. Odejmowanie dwóch macierzy:

$$\dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{B} = \dim \mathbf{C}$$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

4. Mnożenie macierzy przez liczbę:

$$\dim \mathbf{B} = \dim \mathbf{A}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha \rightarrow b_{ij} = \alpha\, a_{ij}}$$

$$3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\cdot 3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Własności mnożenia macierzy przez liczbę:

1) $1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$

2) $0\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$

3) $\alpha(\beta\cdot\mathbf{A}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{A}$

4) $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{A} = \alpha\cdot\mathbf{A} + \beta\cdot\mathbf{A}$

5) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\cdot\mathbf{A} + \alpha\cdot\mathbf{B}$

5. Mnożenie macierzy przez macierz:

Dane: dim **A** = m x n dim **B** = n x q

tzn. liczba *kolumn* **A** = liczbie *wierszy* **B**

Określamy macierz **C**, taką, że dim **C** = m x q, której współczynniki
określone są wzorem:

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jl}$$

wtedy: **C = A · B** $\leftarrow$ macierz **C** jest iloczynem macierzy **A** i **B**.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & .. & l & .. & q \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array} &
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & .. & \cdot & .. & \cdot \\
\cdot & \cdot & .. & \cdot & .. & \cdot \\
\cdot & \cdot & \vdots & \cdot & \vdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & .. & c_{il} & .. & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdot & \cdot & .. & \cdot & .. & \cdot
\end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & .. & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array} &
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & .. & \cdot \\
\cdot & \cdot & .. & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdot & \cdot & .. & \cdot
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & .. & l & .. & q \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} &
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & .. & b_{1l} & .. & \cdot \\
\cdot & \cdot & .. & b_{2l} & .. & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdot & \cdot & .. & b_{nl} & .. & \cdot
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jl} = a_{i1}\, b_{1l} + a_{i2}\, b_{2l} + \cdots + a_{in}\, b_{nl}$$

Przykład mnożenia macierzowego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 3 & 19 \\ -13 & -8 & 16 & -7 \end{bmatrix}$$

Własności: (**A**, **B**, **C** - macierze; α - skalar (liczba)

1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
2) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$
3) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
4) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
5) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$
6) $\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}$

Ad. 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 16 & 39 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 22 \\ 21 & 26 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{2x3} \cdot \mathbf{B}_{3x4} = \mathbf{C}_{2x4}$ ale $\mathbf{B}_{3x4} \cdot \mathbf{A}_{2x3}$ $\rightarrow$ nie ma sensu

6. Transpozycja macierzy:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T$$

Macierz transponowana powstaje z macierzy wyjściowej przez zamianę wierszy z kolumnami.

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \rightarrow b_{ij} = a_{ji}}$$

$$\dim \mathbf{A} = m \times n \rightarrow \dim \mathbf{B} = \dim \mathbf{A}^T = n \times m.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 21 \\ 2 & 12 & 22 \\ 3 & 13 & 23 \\ 4 & 14 & 24 \\ 5 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Własności:

1) $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \mathrm{A}$

2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

3) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$

Wniosek: Macierz identyczna ze swoją macierzą transponowaną jest macierzą *symetryczną*. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

czyli: macierz symetryczna jest macierzą kwadratową, której elementy są symetryczne względem przekątnej głównej.

Twierdzenie: Iloczyn macierzy i jej macierzy transponowanej jest macierzą symetryczną, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}}$.

$$\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{bmatrix}$$

7. Rozkład macierzy na składową symetryczną i asymetryczną

Dana jest $\mathbf{A} = [a_{ij}]$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) \quad + \quad \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$$

Można napisać: $b_{ij} = b_{ji}$ $\qquad$ $c_{ij} = -c_{ji}$

sym. $\qquad$ *asym.*

czyli $\quad \mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$

gdzie: $b_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$ - składnik symetryczny

$c_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$ - składnik asymetryczny

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Wyznacznik macierzy kwadratowej

$$\mathbf{A}_{n\times n} = [\, a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow$$

uporządkowana tablica liczb

Tej tablicy przypisujemy pewną *liczbę* W obliczana wg ściśle określonych reguł i zwaną wyznacznikiem:

$$W = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|$$

SPOSÓB OBLICZANIA WYZNACZNIKA:

Krok 1: Z kolejnych wierszy macierzy wybieramy po jednym elemencie, każdy leżący w innej kolumnie.

Wybieramy wszystkie możliwe kombinacje.

Np. dla macierzy 3 x 3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Możliwosci wyboru	Permutacje drugich indeksów	*t*	
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	1 2 3	0	+
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	1 3 2	1	-
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	2 1 3	1	-
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	2 3 1	2	+
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	3 1 2	2	+
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	3 2 1	3	-

Krok 2: Dla każdej możliwości określa się najmniejszą liczbę przestawień *t* odpowiedniej permutacji, przywracającą naturalny porządek *1,2, 3, . . . , n*.

Np.
$$\begin{matrix} 321 & \rightarrow & 231 & \rightarrow & 213 & \rightarrow & 123 \\ 1 & + & 1 & + & 1 & = & 3 = t \end{matrix}$$

Reguła obliczania liczby przestawień:

Idąc w danej permutacji od lewej do prawej strony sumuje się ilość cyfr po prawej stronie kolejnej cyfry, które są od niej mniejsze.

Permutacje:	3 2 1	2 3 1	5 3 1 2 4
	↓ ↓	↓ ↓	↓ ↓ ↓ ↓
t =	2+1 = 3	1+1 = 2	4+2+0+0 = 6

Krok 3: Tworzy się sumę iloczynów elementów wybranych w **kroku 1** opatrzonych znakiem "+" gdy ilość przestawień stowarzyszonej permu-tacji wyznaczona w **kroku 2** jest parzysta lub znakiem "-" jeżeli jest nie-parzysta.

Dla rozpatrywanego przykładu:

$$W = \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + \\ - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Ogólnie: dla macierzy $\mathbf{A}_{n \times n}$

$$\det A = \sum (-1)^t \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

gdzie sumowanie jest rozciągniete na wszystkie możliwe permutacje $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n$ ciągu liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ zaś t jest liczbą przestawień.

Wyznacznik macierzy diagonalnej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \rightarrow \det \mathbf{A} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ ... \ \cdot a_n$$

Wyznacznik macierzy 2 x 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Wyznacznik macierzy 3 x 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{lub} \quad \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \leftarrow \quad \text{reguł a Sarrusa}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Własności wyznacznika:

1. Zamiana dwóch wierszy macierzy zmienia znak wyznacznika.

2. Pomnożenie wiersza przez liczbę powoduje pomnożenie wyznacznika przez tą samą liczbę.

3. Jeżeli dwa wiersze w macierzy są identyczne to wyznacznik jest równy zero.

4. Dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę nie zmienia wartości wyznacznika.

5. Wyznacznik macierzy transponowanej jest taki sam jak macierzy oryginalnej.

Uwaga: Własności 1 ÷ 4 dotyczą również kolumn macierzy ← *konsek-wencja własności 5* (det $\mathbf{A}^T$ = det $\mathbf{A}$).

Definicja: Macierz, której wyznacznik jest równy **zeru** nazywamy macierzą **osobliwą**.

Numeryczne wyznaczanie wartości wyznacznika:

Korzystając z własności 4, wyznacznik macierzy oryginalnej przekształcamy do wyznacznika macierzy diagonalnej.

Przykład2: $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -54$ (np. z reguł ySarrusa)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} \cdot(-5) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \end{vmatrix} \cdot(-2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} \cdot\left(\frac{2}{18}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} \cdot\left(\frac{4}{18}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-18) = -54$$

INNA METODA WYZNACZANIA WARTOŚCI WYZNACZNIKA MACIERZY

Dana jest macierz kwadratowa

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & j & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} i \end{array}$$

Usuwamy z **A** i - ty wiersz i j - tą kolumnę $\rightarrow$ macierz $\mathbf{A}^{ij}$

$$\dim \mathbf{A}^{ij} = (n\text{-}1) \times (n\text{-}1)$$

Podwyznacznik macierzy **A** odpowiadający elementowi a_{ij}:

$$\text{minor } (a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}^{ij}$$

Wtedy zachodzi:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ minor } \left(a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}}$$

Przykład: $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -54$

Wybieramy pierwszy wiersz do rozwinięcia: $n = 3$, $i = 1$, $j = 1, 2, 3$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A^{1j} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$